

CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL



(Continuacion)

Si una funcion queda finita para todos los valores finitos de la variable, como asímismo todas sus derivadas consecutivas, el desarrollo, por la fórmula de Taylor, es siempre igual a la funcion. En este caso se puede considerar el desarrollo como *idénticamente* igual a la funcion.

Otras espresiones de la resta

Hagamos $X-a=x$ en la fórmula de Taylor, ésta se convierte en la siguiente

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$

I la espresion de la resta es

$$R=\int_a^{a+x}\frac{(a+x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(z)\,dz$$

Sea

$$z-a=ux$$

Se tendrá

$$R = \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^n (a+ux)\, du$$

Consideremos (fig. 2) un sistema de tres ejes rectangulares $OUYZ$ i dos cilindros C i C' cuyas ecuaciones son

$$y = (1-u)^{p-1}$$

$$z = (1-u)^{n-p} f^n (a+ux)$$

El volúmen comprendido entre los tres planos de coordenadas i los dos cilindros tiene por valor

$$V = \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^n (a+ux)\, du$$

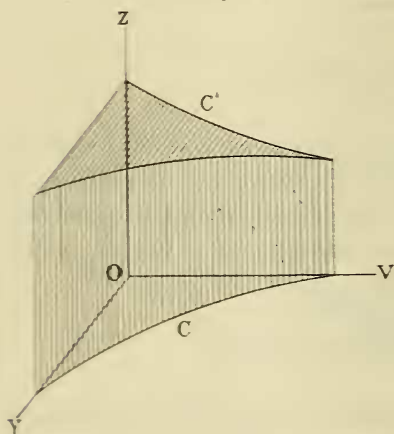


Fig. 2

Este volúmen puede evaluarse de otra manera; es igual, en efecto, al producto de la base del cilindro C, paralelo a OZ, por cierta altura igual a la lonjitud de una de las alistas limitadas por el cilindro C', paralelo a OY. La lonjitud de esta alista tendrá una espresion como la siguiente

$$(1-\theta)^{n-p} f^n (a+\theta x)$$

i, en esta espresion, θ es un coeficiente comprendido entre 0 i 1.

El área de la base es, por otra parte

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1}\, du = \frac{1}{p}$$

Luego

$$V = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p} f^n (a+\theta x)$$

Llevando este valor de V en el segundo miembro de R se obtiene

$$R=\frac{x^n}{1.2...(n-1)}\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}f^n(a+\theta x)$$

Es la espresion dada por *Roche.*

Si en esta última se hace $p=n$ se obtiene

$$R=\frac{x^n}{1.2...n}f^n(a+\theta x)$$

Es la espresion dada por *Lagrange.*

Por fin si $p=1$, se obtiene

$$R=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^n(a+\theta x)$$

Es la espresion dada por *Cauchy.*

Es bien claro que los valores de θ que figuran en estas tres fóimulas no son iguales; se ha conservado sin embargo la misma letra para indicar que, en las tres fórmulas, θ representa un coeficiente indeterminado, comprendido entre 0 i 1.

Fórmula de Mac-Laurin

Si se hace $a=0$ se obtiene la fórmula de Mac-Laurin.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+...$$

Las espresiones de la resta son en este caso.

$$R=\frac{x^n}{1.2...(n-1)}\int_0^1(1-u)^{n-1}f^n(ux)\,du$$

$$R=\frac{x^n}{1.2...(n-1)}\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}f^n(\theta x) \quad \text{Roche}$$

$$R=\frac{x^n}{1.2...n}f^n(\theta x) \quad \text{Lagrange}$$

$$R=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^n(\theta x) \quad \text{Cauchy}$$

CAPÍTULO IV

PROPIEDADES DEL DESARROLLO DE TAYLOR EN LAS ABCISAS CRÍTICAS

Sea γ una abcisa crítica de la funcion $f(X)$. Segun la definicion, dada mas arriba, la funcion o una de sus derivadas se hace infinita cuando $X=\gamma$. Para fijar las ideas, supondremos que la derivada de órden q sea la primera de las derivadas de $f(X)$ que se hace infinita cuando $X=\gamma$.

En la fórmula de Taylor

$$(1) \qquad f(X)=f(a)+\frac{X-a}{1}f'(a)+\frac{(X-a)^2}{1.2}f''(a)+\dots$$

supondremos tambien, para fijar las ideas, que a es positivo i γ mayor que a.

Para todos los valores de X comprendidos entre a i γ el primer miembro de (1) es igual al segundo, (es una consecuencia del teorema demostrado en el capítulo anterior), luego, para los mismos valores de X, las derivadas consecutivas de los dos miembros de (1) son tambien iguales entre sí i se tiene

$$(2) \qquad f^q(X)=f^q(a)+\frac{X-a}{1}f^{q-1}(a)+\frac{(X-a)^2}{1.2}f^{q-2}(a)+\dots$$

Hagamos en esta fórmula $X=\gamma-\epsilon$, los dos miembros quedarán iguales, cualquiera que sea el órden de pequeñez de ϵ; por hipótesis el primer miembro tiende hácia el infinito cuando ϵ tienda hácia cero, luego tambien el segundo miembro tiende hácia el infinito cuando ϵ tiende hácia cero i se tiene, en el límite

$$(3) \qquad \infty=f^q(a)+\frac{\gamma-a}{1}f^{q+1}(a)+\frac{(\gamma-a)^2}{1.2}f^{q+2}(a)+\dots$$

Consideremos otra derivada $f^p(X)$, se tendrá tambien

$$(4) \qquad f^p(X)=f^p(a)+\frac{X-a}{1}f^{p+1}(a)+\frac{(X-a)^2}{1.2}f^{p+2}(a)+\dots$$

Esta fórmula será exacta como (1) para todos los valores de X comprendidos entre a i γ. Cuando $X=\gamma-\epsilon$, los dos miembros quedan iguales cualquiera que sea el órden de pequeñez de ϵ, luego en el límite se tendrá tambien

$$f^p(\gamma)=f^p(a)+\frac{\gamma-a}{1}f^{p+1}(a)+\frac{(\gamma-a)^2}{1.2}f^{p+2}(a)+\ldots$$

Si p es menor que q el primer miembro es finito, pues se ha supuesto que $f^q(X)$ es la primera de las derivadas de $f(X)$ que se hace infinita cuando $X=\gamma$; por consiguiente, en este caso, el segundo miembro es una serie converjente.

TEOREMA I.

Si $f^q(X)$ es la primera de las derivadas de $f(X)$ que se hace infinita cuando $X=\gamma$, la serie $f^q(\gamma)$ es estrictamente diverjente.

En efecto la serie $f^q(\gamma)$ tiene una suma infinita i la serie $f^{q-1}(\gamma)$ una suma finita. La razon entre los términos de rango $n-q+1$ i $n-q$ de la serie $f^q(\gamma)$ es

$$r=\frac{\gamma-a}{n-q}\,\frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)}$$

I la razon entre los términos de rango $n-q+2$ i $n-q+1$ de la serie $f^{q-1}(\gamma)$ es

$$r'=\frac{\gamma-a}{n-q+1}\,\frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)}=r\,\frac{n-q}{n-q+1}$$

Si todos los términos de la serie tienen el mismo signo, se podrá escribir, cuando n es mui grande

$$\lim r=1-\frac{\phi(n)}{n}$$

Luego

$$\lim r'=1-\frac{\phi(n)+1}{n}$$

Por hipótesis, la serie $f^q(\gamma)$ es diverjente, por consiguiente

$$\lim \phi(n)\leqq 1$$

I la serie $f^{q-1}(\gamma)$ es converjente, luego

$$\lim\,[\phi(n)+1] > 1$$

O bien

$$\lim\,\phi(n) > 0$$

Se deduce de ahí que el límite de $\phi(n)$ es comprendido entre 0 i 1, por consiguiente la serie $f^{q}(\gamma)$ es estrictamente diverjente.

TEOREMA II.

Si una funcion $f^{q}(X)$ se desarrolla bajo la forma de una serie estrictamente diverjente cuando $x=\gamma$, las integrales de $f^{q}(X)$ dan series converjentes i las derivadas series diverjentes para el mismo valor de X.

En efecto, la razon entre los términos de rango $n-q+1$ i $n-q$ de la serie $f^{q}(\gamma)$ es

$$r=\frac{\gamma-a}{n-q}\,\frac{f^{n}(a)}{f^{n-1}(a)}$$

I la razon entre los términos de rango $n-p+1$ i $n-p$ de la serie $f^{p}(\gamma)$ es

$$r_1=\frac{\gamma-a}{n-p}\,\frac{f^{n}(a)}{f^{n-1}(a)}=r\,\frac{n-q}{n-p}$$

Si se pone

$$\lim\,r=1-\frac{\phi(n)}{n}$$

Se tiene

$$\lim\,r_1=1-\frac{\phi(n)+q-p}{n}=1-\frac{\psi(n)}{n}$$

Por hipótesis se supone que el límite de $\phi(n)$ es comprendido entre 0 i 1, i se tiene

$$\lim\,\psi(n)=\lim\,\phi(n)+q-p$$

Si p es menor que q el límite de $\psi(n)$ será mayor que 1 luego la serie $f^p(\gamma)$ es converjente; en este caso $f^p(X)$ es una de las integrales de $f^q(X)$.

Si p es mayor que q el límite de $\psi(n)$ es negativo, luego la serie $f^p(\gamma)$ es diverjente; en este caso, $f^p(X)$ es una de las derivadas de $f^q(X)$.

COROLARIO.—*Una funcion cualquiera, sus derivadas i sus integrales tienen las mismas abcisas críticas; luego la integral de una funcion será igual a la integral correspondiente del desarrollo de Taylor si, entre los límites de la integracion, no existen abcisas críticas.*

TEOREMA III.

Si γ es una abcisa crítica de la funcion $f(X)$; el desarrollo de Taylor, aplicado a esta funcion o a una cualquiera de sus derivadas, da una serie converjente solo cuando $X-a$ queda menor en valor absoluto que $\gamma-a$.

Sea en efecto $f^p(X)$ una cualquiera de las derivadas de $f(X)$ i r_2 la razon de los términos de rango $n-p+1$ i $n-p$ del desarrollo; se tiene

$$r_2=\frac{X-a}{n-p}\;\frac{f^n(a)}{f^{n-1}(a)}$$

O bien, si se compara al valor de r_1 deducido del desarrollo de $f^p(\gamma)$.

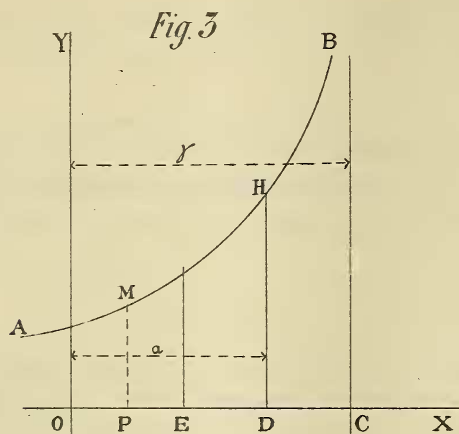
$$r_2=\frac{X-a}{\gamma-a}\,r_1$$

El límite de r_1 es uno, luego el límite de r_2 es $\dfrac{X-a}{\gamma-a}$.

La serie $f^p(X)$ será, por consiguiente, converjente si $X-a$ es menor, en valor absoluto, que $\gamma-a$.

NOTA.—Sea (fig. 3) AB la curva cuya ecuacion es $y=f(X)$; $OC=\gamma$ una abcisa crítica i $OD=a$; OE una abcisa tal que $ED=DC$. El teorema III limita el desarrollo de $f(X)$ segun las potencias de $X-a$, a los valores de X comprendidos entre OE i OC.

Consideremos una abcisa como OP, fuera de los límites asignados i tal que entre OP i OD no exista abcisa crítica. Se ha demostrado que el desarrollo de Taylor es igual a la funcion cada vez que en el intervalo $X-a$, no existe abcisa crítica. Luego parece haber aquí una contradiccion.



La contradiccion es solo aparente; en efecto, hai dos clases mui distintas de series diverjentes: unas en que la suma de los términos crece indefinidamente, otras indeterminadas formadas de términos con signos alternados.

El desarrollo de Taylor aplicado al valor $X=OP$ daria precisamente una serie indeterminada, ésta puede representar la ordenada MP pero no tiene ninguna utilidad, pues es imposible determinar su suma.

En resúmen, el teorema III da dos especies de límites: uno fuera del cual el desarrollo no representa la funcion i otro fuera del cual el desarrollo no tiene ninguna utilidad práctica.

CAPÍTULO V

APLICACION DE LA FÓRMULA DE TAYLOR A ALGUNOS DESARROLLOS

Desarrollo de e^X

Esta funcion no tiene ninguna abcisa crítica, pues ningun valor finito de X hace infinita, sea la funcion, sea una cualquiera

de sus derivadas. El desarrollo de Taylor será por consiguiente igual siempre a la funcion.

Todas las derivadas de e^x son iguales a e^x, por consiguiente

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots=e^a$$

Sea

$$X-a=x$$

La fórmula de Taylor nos dará

$$(1) \qquad e^{a+x}=e^a\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots\right)$$

Cuando $a=0$

$$(2) \qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$

Luego se verifica la relacion característica de las funciones esponenciales.

$$e^{a+x}=e^a\times e^x$$

Cuando se habrán calculado n términos de la serie, la resta R será igual, segun la espresion de Lagrange, a

$$R=\frac{x^n}{1.2\dots n}e^{\theta x}$$

Se ve que esta resta tiende hácia cero, cualquiera que sea x. La serie (2) es por consiguiente siempre converjente, i esto se averigua inmediatamente si se observa que la razon entre dos términos consecutivos es igual a $\frac{x}{n}$ i tiende hácia cero.

En otros términos la relacion (2) debe ser considerada como una *identidad.*

Desarrollos de sen X i cos X

Estas dos funciones no tienen tampoco abcisas críticas; las derivadas consecutivas de sen X son

$$+\cos X, -\operatorname{sen} X, -\cos X, +\operatorname{sen} X, +\cos X\dots \text{ etc.}$$

i las de cos X

$$-\operatorname{sen} X, -\cos X, +\operatorname{sen} X, +\cos X, -\operatorname{sen} X\dots \text{ etc.}$$

Se ve que, ni la funcion ni sus derivadas, se hacen infinitas para ningun valor de X. Se tendrá ahora si se hace

$$X=a+x$$

$$\text{sen}\,(a+x)=\text{sen}\,a\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\right)+\cos a\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

$$\cos\,(a+x)=\cos a\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\right)-\text{sen}\,a\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

Cuando a=o

$$(3)\quad\begin{cases}\text{sen}\,x=\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{1.2.3}+\ldots\\ \cos x=1-\dfrac{x^2}{1.2}+\dfrac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\end{cases}$$

Por consiguiente

$$\text{sen}\,(a+x)=\text{sen}\,a\cos x+\cos a\,\text{sen}\,x$$

$$\cos\,(a+x)=\cos a\cos x-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,x$$

Se obtienen pues las relaciones características de las funciones sen X i cos X.

Cuando se habrán calculado n términos de cada serie, las restas tendrán por valor, segun la espresion de Lagrange:

$$R=\pm\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\,\frac{\text{sen}}{\cos}\,(\theta\,x)$$

Se ve que R tiende siempre hácia cero, cualquiera que sea x. Las series (3) son, por consiguiente, siempre converjentes i las relaciones (3) se deben considerar como identidades,

Desarrollo de LX

Esta funcion tiene una abcisa crítica $X=0$, luego si se hace $X=x+a$ el desarrollo de Taylor será converjente para los valores de x comprendidos entre $-a$ i $+a$.

Se tiene ahora

$$f(X)=LX$$

$$f'(X)=\frac{1}{X}=X^{-1}$$

$$f''(X)=-X^{-2}$$

$$f'''(X)=+2X^{-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(X)=(-1)^{n-1}\,2.3\ldots(n-1)\,X^{-n}$$

Por consiguiente

$$L(x+a)=La+\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{a^3}-\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{a^4}+\ldots$$

Hagamos $a=1$

(4) $$L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

De ahí se deduce

$$L\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{a^3}-\frac{1}{4}\,\frac{x^4}{a^4}+\ldots$$

Luego

$$L(x+a)=La+L\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

Es la relacion característica de la funcion LX.

Discusion de la serie (4)

Ya se sabe que el segundo miembro representa la funcion cuando x es menor que 1 en valor absoluto.

Se averigua fácilmente que, entónces, la serie es converjente, pues la razon entre dos términos consecutivos es

$$\pm x\frac{n}{n+1}$$

Esta razon es menor que 1 si x es menor que 1.

Cuando se habrán calculado n términos, la resta será igual, segun la espresion de Lagrange, a

$$R=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

Si x es positivo i menor que 1 esta resta tiende hácia cero; pero no se puede decir nada cuando x es negativo; se toma entónces la espresion de Cauchy, i ésta da

$$R=\frac{x}{1+\theta x}\left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

Se ve que la resta tiende hácia cero si x es negativo i menor que 1 en valor absoluto

Casos límites en que $x=\pm 1$

Cuando $x=-1$ el segundo miembro de (4) se convierte en la serie armónica; esta tiene una suma infinita. La resta se puede calcular por medio de la fórmula

$$R=-\frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 (1-u)^{n-1}f^n(a+ux)\,du$$

Se obtiene aquí

$$R=-\int_0^1\frac{du}{1-u}=-\infty$$

Es otra manera de demostrar que la serie armónica es diverjente.

Cuando $x=+1$, el segundo miembro de (4) se presenta bajo la forma de la serie armónica con sus términos de signos alternados, se sabe que la serie es semi-converjente; su valor es entónces L 2. Por lo demas la resta de Lagrange obtenida mas arriba tiende hácia cero cuando $x=+1$, lo que demuestra tambien la converjencia de la serie.

TEOREMA.

Si la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

es estrictamente diverjente, el producto

$$P = (1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)\dots$$

tiende hácia cero.

Sea, en efecto, a_n el primer término de la serie que sea menor que uno i P_n el producto de los $n-1$ primeros factores, se tiene

$$P = P_n (1 - a_n)(1 - a_{n+1})\dots$$

Luego

$$LP = LP_n + L(1 - a_n) + L(1 - a_{n+1}) + \dots$$

Reemplacemos los logaritmos del segundo miembro salvo LP_n por sus desarrollos en serie; estos desarrollos representarán los logaritmos correspondientes, pues a_n, $a_{n+1}\dots$ son menores que uno.

Se tendrá entónces

$$LP = LP_n - (a_n + a_{n+1} + \dots) - \frac{1}{2}(a_n^2 + a_{n+1}^2 + \dots)\dots$$

Como la serie $a_1 + a_2 + \dots$ es estrictamente diverjente, el segundo miembro de esta espresion es igual $a - \infty$, luego

$$P = 0$$

Aplicacion.

El producto

$$P = \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3}\dots$$

es igual a cero cuando el número de factores es infinito; en efecto se puede escribir tambien

$$P = \pm\left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{1}\right)\dots$$

I la serie

$$\frac{m}{1}+\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+\ldots=m\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$$

es estrictamente diverjente.

Desarrollo de X^m

Si m es entero i positivo, la funcion X^m no tiene ninguna abcisa crítica; el desarrollo de $(x+a)^m$ se presenta entónces bajo la forma de una serie de un número finito de términos i esta serie es idénticamente igual a la funcion.

Si m es fraccionario o negativo, $X=0$ es una abcisa crítica pues, sea la funcion, sea una de sus derivadas se hace infinita para este valor de X. Segun esto, si se pone $X=x+a$, el desarrollo de $(x+a)^m$ representará la funcion, solo en caso que x sea comprendido entre $-a$ i $+a$.

Se tiene ahora

$$f(X)=X^m$$
$$f'(X)=m\,X^{m-1}$$
$$f''(X)=m\,(m-1)\,X^{m-2}$$
$$\vdots$$
$$f^n(X)=m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)\,X^{m-n}$$

Luego

$$(x+a)^m=a^m\left\{1+\frac{m}{1}\,\frac{x}{a}+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{m\,(m-1\,(m-2)}{1.2.3}\,\frac{x^3}{a^3}\ldots\right\}$$

Hagamos $a=1$, tendremos

$$(5)\quad (x+1)^m=1+\frac{m}{1}\,x+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\,x^2+\frac{m\,(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,x^3+\ldots$$

De aquí se deduce

$$\left(\frac{x}{a}+1\right)^m=1+\frac{m}{1}\,\frac{x}{a}+\frac{m\,(m-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{a^2}+\ldots$$

Luego

$$(x+a)^m = a^m \left(\frac{x}{a} + 1 \right)^m$$

Es la relacion característica de la funcion X^m.

Discusion de la serie (5)

Segun lo dicho anteriormente, el desarrollo de $(1+x)^m$ representa la funcion cuando x es menor que 1 en valor absoluto.

La serie es en efecto converjente para estos valores de x, pues la razon de dos términos consecutivos es

$$x \frac{m-n+1}{n}$$

Esta razon tiende hácia x i es menor que 1 si x es menor que 1.

Cuando se habrán calculado n términos, la resta será igual, segun la espresion de Lagrange, a

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} (1+\theta x)^m \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n$$

Este valor de R tiende hácia cero si x es positivo i menor que 1, pues el primer factor de R tiende hácia cero cuando n aumenta i $\left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n$ tiende tambien hácia cero.

Si x es negativo, se toma la resta bajo la forma dada por Cauchy, se obtiene entónces

$$R = -m \left(1 - \frac{m}{1} \right) \left(1 - \frac{m}{2} \right) \ldots \left(1 - \frac{m}{n-1} \right) \frac{(1+\theta x)}{1-\theta} \left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x} \right)^n$$

Se averigua entónces que tiende tambien hácia cero cuando x es negativo i menor que 1 en valor absoluto.

Caso límite $x = -1$

La serie (5) toma entónces la forma

$$(6) \qquad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots$$

i representa el valor de X^m cuando X es igual a cero. Como se ha esplicado mas arriba, la serie es todavía igual a la funcion cuando la variable es igual a la abcisa crítica, luego la serie (6) es converjente e igual a cero si m es positivo; diverjente si m es negativo.

Cualquiera que sea m la primera de las derivadas de X^m que se hace infinita es la derivada en la cual el esponente de X es comprendido entre 0 i 1, luego cuando m es comprendido entre 0 i 1, la serie (6) es estrictamente diverjente.

Estos resultados pueden establecerse directamente, en efecto, la razon entre un término i el anterior, es igual a

$$-\frac{m-n+1}{n} = 1 - \frac{m+1}{n}$$

Por consiguiente la serie (6) es: 1.° estrictamente diverjente si m es comprendido entre 0 i 1; 2.° converjente si m es positivo; 3.° diverjente si m es negativo i mayor que 1 en valor absoluto.

La consideracion de la resta averigua todavía estos resultados; si se toma la espresion de la resta bajo forma de integral se obtiene

$$R = (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^1 (1-u)^{m-1} du$$

1.° Si m es positivo la integral es igual a $\frac{1}{m}$, luego

$$R = (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Se ha demostrado mas arriba que el límite del segundo miembro es cero, luego R tiende hácia cero.

2.° Si m es negativo, la integral es infinita, luego la serie es diverjente.

Caso de $x = +1$

II. Si $x = +1$ la razon entre dos términos consecutivos es igual i de signo contrario a la que se ha obtenido en el caso de $x = -1$; las dos series se componen de los mismos términos pero, para n suficientemente grande, los términos de la serie $(x = -1)$ son todos del mismo signo i los de la serie $(x = +1)$ son de signos alternados. Las reglas de converjencia de esta última serie se deducen por consiguiente inmediatamente de las que se han obtenido para la primera: la serie será *converjente* si m es positivo; *semi-converjente* si m es comprendido entre 0 i -1; *indeterminada* si m es negativo i mayor que uno en valor absoluto.

Desarrollo de arc sen X

La funcion arc sen X tiene las mismas abcisas críticas que su derivada $\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ i esta última tiene por abcisas críticas $X = \pm 1$. Supondremos, en la fórmula de Taylor, $a = 0$; el desarrollo será converjente cuando X sea menor que uno en valor absoluto; se tiene ahora

$$\frac{1}{\sqrt{1-X^2}} = (1-X^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1.3}{2.4} X^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} X^6 + \ldots$$

Luego

$$\text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ya se sabe que la serie del segundo miembro de $\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ es estrictamente diverjente cuando $x = \pm 1$ luego, para el mismo valor de X la serie correspondiente a arc sen x es converjente; su suma es por otra parte igual a arc sen $1 = \frac{\pi}{2}$ luego

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots$$

CAPÍTULO VI

DE LAS CANTIDADES IMAJINARIAS

La teoría completa de la fórmula de Taylor conduce naturalmente a considerar las cantidades imajinarias. En efecto, las condiciones de converjencia del desarrollo son ligadas íntimamente a la determinacion de las abcisas críticas de la funcion i éstas son las raices de una ecuacion aljebraica en la cual se espresa que la funcion o una de sus derivadas es infinita.

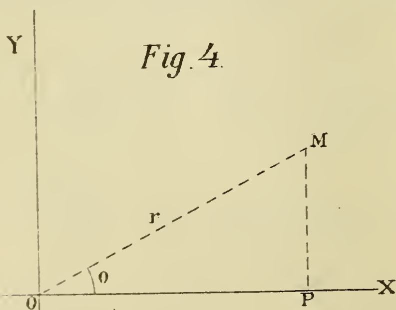
Entre las raices de esta ecuacion pueden haber algunas imajinarias; por consiguiente, es necesario saber como se modifican, en este caso, las condiciones de converjencia del desarrollo.

Variable imajinaria.—Módulo i argumento

Sean x e y dos variables reales i

$$X = x + y\sqrt{-1}$$

se dice que X es una variable imajinaria. Consideremos, en un plano (fig. 4) dos ejes rectangulares OX i OY i sea M un punto de abcisa x i de ordenada y, el punto M representa figuradamente la variable compleja X. Así todos los valores de X son representados figuradamente por el conjunto de los puntos del plano XOY; entre ellos, los que estan situados sobre el eje OX representan los valores reales de X.



El punto M puede ser tambien definido por medio de sus coordenadas polares: $OM = r$ i $MOP = \theta$, entónces

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Se toma siempre r positivo, de tal manera que θ es perfectamente determinado: r es el *módulo* de la variable imajinaria i θ es el *argumento.*

Fórmula de Euler

En el capítulo anterior se ha establecido *la identidad.*

$$(1) \qquad e^{a+x} = e^{a}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

Hagamos en ella

$$a = 0,\ x = \omega\sqrt{-1}$$

Tendremos

$$e^{\omega\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{\omega^2}{2} + \ldots\right) + \sqrt{-1}\left(\omega - \frac{\omega^3}{1.2.3}\ldots\right)$$

La primera paréntesis es el desarrollo de cos ω i la segunda, el desarrollo de sen ω. Estos dos desarrollos son idénticamente iguales a las funciones correspondientes, luego se tiene tambien *idénticamente*

$$e^{\omega\sqrt{-1}} = \cos\omega + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\omega$$

Es la fórmula de *Euler.*

Fórmula de Moivre

Se tiene *idénticamente*, cualesquiera que sean a i x.

$$e^{a+x} = e^{a} \cdot e^{x}$$

Hagamos

$$a = x = \omega\sqrt{-1}$$

Tendremos

$$e^{2\omega\sqrt{-1}} = \left(e^{\omega\sqrt{-1}}\right)^2$$

Hagamos ahora

$$a=\omega\sqrt{-1},\ x=2\,\omega\sqrt{-1}$$

Tendremos

$$e^{3\,\omega\sqrt{-1}}=e^{\omega\sqrt{-1}}\,e^{2\,\omega\sqrt{-1}}$$

$$=e^{\omega\sqrt{-1}}\left(e^{\omega\sqrt{-1}}\right)^2=\left(e^{\omega\sqrt{-1}}\right)^3$$

I así en seguida. Se llega finalmente a la fórmula

$$e^{m\,\omega\sqrt{-1}}=\left(e^{\omega\sqrt{-1}}\right)^m$$

O bien

$$\cos m\,\omega+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,m\,\omega=\left(\cos\omega+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\omega\right)^m$$

Esta es la fórmula de *Moivre* que su autor estableció directamente, sin pasar por la consideracion de los esponenciales. Las fórmulas de Moivre i de Euler se prestan a muchas aplicaciones.

I

Espresar sen $m\,a$ i cos $m\,a$ en funcion de las potencias de sen a i cos a.

La fórmula de Moivre da inmediatamente

$$\cos m\,a+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,m\,a=\left(\cos a+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,a\right)^m=$$

$$=\cos^m a+\frac{m}{1}\sqrt{-1}\cos^{m-1}a\,\text{sen}\,a+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\,\text{sen}^2 a+\ldots$$

Si se nota ahora que una cantidad imajinaria no puede igualar una cantidad real, se deduce de la ecuacion precedente las dos siguientes que resuelvan el problema:

$$\cos m\,a=\cos^m a-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\,\text{sen}^2 a+\ldots$$

$$\text{sen}\,m\,a=\frac{m}{1}\cos^{m-1}a\,\text{sen}\,a-\frac{m(m-1(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}a\,\text{sen}^3 a+\ldots$$

II

Espresar $sen^{m}\,\alpha$ *i* $cos^{m}\,\alpha$ *en funcion de los senos i cosenos de los múltiples de* α.

La fórmula de Euler

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, x$$

da tambien

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, x$$

Por consiguiente

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Reemplazaremos, en lo que sigue, la espresion $\sqrt{-1}$ por la letra i, tendremos

$$\cos^{m} x = \frac{\left(e^{xi} + e^{-xi}\right)^{m}}{2^{m}} = \frac{1}{2^{m}}\left\{ e^{mxi} + \frac{m}{1} e^{(m-2)xi} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)xi} + \ldots + e^{-mxi} \right\}$$

O bien, si se suman, en la paréntesis, los términos a igual distancia de los estremcs

$$\cos^{m} x = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{ \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots \right\}$$

Del mismo modo

$$\mathrm{sen}^{m} x = \frac{1}{2^{m}\,{}^{m}\, i}\left\{ e^{mxi} + \frac{m}{1} e^{(m-2)xi} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)\,x\,i} \ldots \right\}$$

Se deben aquí distinguir dos casos.

1.[er] Caso—*m es par.* Sea $m=2n$; se tendrá

$$\text{sen}^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2n x - \frac{2n}{1} \cos (2n-2) x + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \cos (2n-4) x \ldots \right\}$$

2.° Caso. - *m es impar.* Sea $m=2n+1$; se tendrá

$$\text{sen}^{2n-1} x = \frac{(+1)^n}{2^{2n}} \left\{ \text{sen}(2n+1)x - \frac{2n+1}{1} \text{sen}(2n-1)x + \frac{(2n+1)\,2n}{1.2} \text{sen}(2n-3)x \ldots \right\}$$

III

Suma de los senos i cosenos de arcos en progresion aritmética. Sean las sumas

$$C = \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \ldots + \cos[a+(n-1)x]$$

$$S = \text{sen}\, a + \text{sen}(a+x) + \text{sen}(a+2x) + \ldots + \text{sen}[a+(n-1)x]$$

Multipliquemos la segunda por $\sqrt{-1}$ i sumamos; la fórmula de Euler dará

$$C + S i = e^{ai} + e^{(a+x)i} + e^{(a+2x)i} + \ldots + e^{[a+(n-1)x]i}$$

El segundo miembro es una progresion jeométrica cuya razon es e^{ix}, luego

$$C + S i = e^{ai} \frac{e^{nxi}-1}{e^{xi}-1} = e^{a+\frac{n-1}{2}x} \frac{e^{\frac{nxi}{2}} - e^{-\frac{nxi}{2}}}{e^{\frac{xi}{2}} - e^{-\frac{xi}{2}}}$$

O bien

$$C + S i = \frac{\text{sen}\frac{nx}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}} \left\{ \cos\left(a + \frac{n-1}{2}\right) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(a + \frac{n-1}{2}x\right) \right\}$$

Finalmente

$$C=\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}x\right)$$

$$S=\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{n-1}{2}x\right)$$

IV

De las series trigonométricas

Consideremos las dos series

$$C=u_0\cos\theta+u_1\cos(\theta+\omega)+u_2\cos(\theta+2\omega)+\dots$$

$$S=u_0\operatorname{sen}\theta+u_1\operatorname{sen}(\theta+\omega)+u_2\operatorname{sen}(\theta+2\omega)+\dots$$

Se tiene

$$C+S\sqrt{-1}=u_0e^{i\theta}+u_1e^{i(\theta+\omega)}+u_2e^{i(\theta+2\omega)}+\dots$$

Sea tambien la serie

$$M=u_0+u_1+u_2+\dots$$

Si los términos de esta última serie son todos positivos, estos serán los módulos de los términos de la serie imajinaria $C+S\sqrt{-1}$; es lo que supondremos aquí.

Cada término de la serie imajinaria puede ser representado, en un plano, por un vector, definido en lonjitud por el módulo i en direccion i sentido por el argumento.

La sucesion de los vectores, colocados unos en seguida de los otros, dibujará, en el plano, un polígono cuyos lados hacen entre sí el ángulo constante ω. El perímetro de este polígono será precisamente la suma M de los módulos.

Ahora, cada término de la serie C i el correspondiente de la serie S representan las proyecciones, sobre los dos ejes de coordenadas, de un lado del polígono representativo; por consiguiente las sumas de estas dos series representan respectivamente las proyecciones sobre los ejes de coordenadas, de la resultante jeométrica de los lados del polígono considerado.

En resúmen, la serie imajinaria $C+S\sqrt{-1}$ representa un polígono cuyos lados hacen entre sí un angulo constante; la serie M de los módulos es su perímetro i las series C i S las proyecciones, sobre los dos ejes de coordenadas, de la resultante jeométrica de todos los lados.

Esta interpretacion jeométrica conduce mui sencillamente a las reglas de converjencia de las series C i S.

TEOREMA I.—*Si la serie de los módulos es converjente, las séries C i S son converjentes.*

En efecto, el polígono representativo tiene un perímetro finito, su resultante jeométrica es por consiguiente finita en lonjitud i determinada en direccion i sentido; sus proyecciones C i S son tambien finitas.

Esto era evidente a priori, pues los términos de las series C i S son menores en valor absoluto que los de la serie M.

TEOREMA II.—*Si la serie de los módulos es estrictamente diverjente, las series C i S son semi converjentes.*

En efecto, el polígono representativo se compone de lados que disminuyen indefinidamente en lonjitud i hacen entre sí un ángulo constante; luego una circunferencia circunscrita a dos lados consecutivos contiene, en el interior, todos los lados siguientes; por otra parte, el radio de esta circunferencia tiende hácia cero, por consiguiente el polígono dibuja en el plano una especie de espiral converjente cuyo punto asintótico es a distancia finita del oríjen. La resultante jeométrica de los vectores es entónces finita en lonjitud i determinada en direccion i sentido; sus dos proyecciones C i S son tambien finitas.

La resultante jeométrica, de los vectores puede obtenerse de otra manera; se sabe, en efecto, que esta no cambia cuando se altera el órden de sucesion de los vectores; supongamos pri-

mero i para mas claridad que ω sea parte alícota de la circunferencia e igual a $\frac{2k\pi}{m}$.

Juntemos separadamente los vectores de misma direccion i sentido, se obtendrá así m resultantes parciales con las cuales se podrá formar un polígono de m lados; éste tiene, por hipótesis, un perímetro infinito i se ha demostrado mas arriba que su resultante jeométrica es finita, luego el polígono así obtenido es semejante de otro polígono finito i cerrado.

Si se cambiara el signo de todos los términos de una o algunas de las m series parciales, el polígono representativo se convertiria en otro que no estaria mas semejante de otro finito i cerrado, sino de un polígono finito cuya resultante jeométrica seria tambien finita; segun esto, la resultante jeométrica del nuevo polígono representativo seria infinita en lonjitud i determinada en direccion i sentido; las dos series C i S tendrian por consiguiente sumas infinitas i serian series estrictamente diverjentes.

El mismo razonamiento se puede aplicar cuando ω no es parte alícota de la circunferencia pues se podrian juntar separadamente los vectores cuyo argumento está comprendido entre ciertos ángulos determinados.

En resúmen, las series C i S son converjentes, pero si se cambia el signo de una serie parcial de términos o de algunas series parciales; las series consideradas se convierten en otras estrictamente diverjentes. Por esta razon se dice que las series C i S son *semi converjentes.*

TEOREMA III.—*Si la serie de los módulos es diverjente, las series C i S son indeterminadas.*

En efecto, el polígono representativo tiene entónces la forma de una espiral diverjente; su resultante jeométrica es infinita i su direccion indeterminada, luego sus proyecciones C i S son indeterminadas.

Caso límite en que los módulos son rigorosamente iguales

En este caso el polígono representativo es inscrito en una misma circunferencia de radio finito; su resultante jeométrica

es por consiguiente finita pero de direccion indeterminada. Sus proyecciones C i S son pues indeterminadas i su valor oscila entre límites finitos.

Sean, por ejemplo, las series

$$C = \cos\theta + \cos(\theta+\omega) + \cos(\theta+2\omega) + \ldots$$
$$S = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta+\omega) + \operatorname{sen}(\theta+2\omega) + \ldots$$

La circunferencia circunscrita al polígono representativo tiene por radio

$$R = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}$$

i su centro tiene por coordenadas

$$\xi = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}$$

$$\eta = \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}$$

Luego la suma de la serie C oscila entre $\xi - R$ i $\xi + R$ i la suma de la serie S entre $\eta - R$ i $\eta + R$.

Resúmen

Las series trigonométricas C i S i la serie imajinaria correspondiente $C + S\sqrt{-1}$ son: converjentes cuando la série M de los módulos es converjente; semi converjentes cuando la serie M es estrictamente diverjente; indeterminadas cuando la serie M es diverjente.

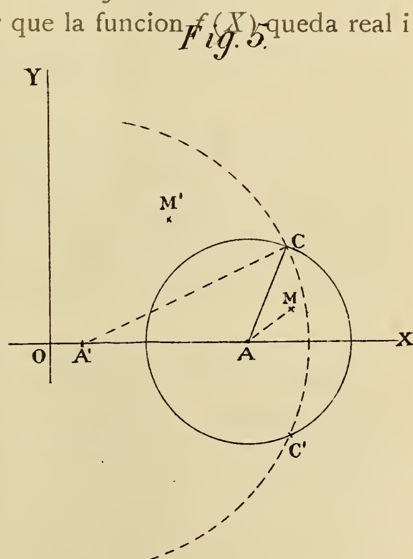
CAPÍTULO VII

DE LAS ABCISAS CRÍTICAS IMAJINARIAS.—CÍRCULO DE CONVERJENCIA

Sea $f(X)$ una funcion cualquiera de X i $f^q(X)$ la primera de sus derivadas que se hace infinita cuando X tiene un valor imajinario como $\gamma = \alpha + \beta\sqrt{-1}$; la funcion considerada tiene entónces una *abcisa crítica imajinaria.* La abcisa γ puede representarse figuradamente por un punto C del plano (fig. 5) éste se llama entónces *punto crítico* de la funcion. Segun esto, a una abcisa crítica real, corresponde un punto crítico situado sobre el eje OX.

Se concibe desde luego que la primera cuestion que se trata de resolver es la siguiente: *¿cuál es el valor que toma una funcion $f(X)$ cuando la variable X es imajinaria?*

Se puede siempre suponer que la funcion $f(X)$ queda real i continua para los valores de X comprendidos entre ciertos límites determinados; en efecto, si no sucediera esto, la funcion considerada quedaria imajinaria para todos los valores reales de X i el estudio de esta funcion no podria tener ninguna utilidad práctica.



Sea, por consiguiente, a un valor real de X comprendido entre los límites consideradas; todas las derivadas de $f(X)$ seran tambien reales i continuas cuando X es igual a a; sea A el punto representativo de la abcisa a, este punto será situado sobre OX; sea tambien M el punto representativo de la

variable X, x e y las coordenadas de este punto de tal manera que $X=x+y\sqrt{-1}$; tracemos AM i sea $AM=\rho$, $MAX=\phi$; se podrá escribir

$$(1)\qquad \begin{cases} x=a+\rho\cos\phi \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

$$X=x+y\sqrt{-1}=a+\rho e^{i\phi}$$

La fórmula dc Taylor da ahora.

$$(2)\quad f(X)=f(a+\rho e^{i\phi})=f(a)+\rho e^{i\phi} f'(a)+\frac{\rho^2}{1.2} e^{2i\phi} f''(a)+\dots$$

O bien

$$(3)\quad \begin{cases} f(X)=C+S\sqrt{-1} \\ C=f(a)+\rho\cos\phi f'(a)+\frac{\rho^2}{1.2}\cos 2\phi f''(a)+\dots \\ S=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi f'(a)+\frac{\rho^2}{1.2}\mathrm{sen}\,2\phi f''(a)+\dots \end{cases}$$

Se ha descompuesto así la funcion $f(X)$ de la variable imajinaria $X=x+y\sqrt{-1}$ en la suma de dos espresiones: una real, otra igual al producto de una funcion real por $\sqrt{-1}$; sin embargo, para que las funciones C i S sean así bien determinadas, es necesario que las series que espresan su valor sean converjentes.

Las funciones C i S dependen solo de x e y, es decir, de la posicion del punto M que representa figuradamente la variable X.

Supongamos, en efecto, que M queda fijo i que A varia, las tres cantidades a, ρ, ϕ satisfarán, segun (1), a las ecuaciones

$$da+d\rho\cos\phi-\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi=0$$
$$d\rho\,\mathrm{sen}\,\phi+\rho\cos\phi\,d\phi=0$$

O bien

$$d\rho=-da\cos\phi$$
$$\rho\,d\phi=da\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Se tiene ahora

$$dC = \frac{dC}{da}\, da + \frac{dC}{d\rho}\, d\rho + \frac{dC}{d\phi}\, d\phi$$

$$= da \left(\frac{dC}{da} - \cos\phi \frac{dC}{d\rho} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho} \frac{dC}{d\phi} \right)$$

Del valor (3) de C, se deduce que la espresion entre paréntesis es idénticamente nula, cuando la serie C es converjente, luego C queda constante cuando M queda fijo; del mismo modo se averigua que S queda constante cuando M queda fijo. Así, cuando las series C i S son converjentes, su suma depende solo de la posicion del punto M que representa figuradamente la variable X.

En otros términos, si se escribe la fórmula (1) bajo la forma.

$$(4) \qquad f(X) = f(a) + \frac{(X-a)}{1} f'(a) + \frac{(X-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

la serie del segundo miembro no depende de a, su valor es igual a $f(X)$, a la condicion que esta serie sea converjente.

Es lo mismo que se ha obtenido cuando X era una variable real.

Condiciones de converjencia de las series C i S

Estas series i la serie imajinaria equivalente (1) son converjentes si la serie de los módulos de los términos es converjente.

Sea $f^p(X)$ una derivada cualquiera de $f(X)$; se tiene como mas arriba

$$(4) \qquad f^p(X) = f^p(a) + \rho e^{i\phi} f^{p+1}(a) + \frac{\rho^2}{1.2} e^{2i\phi} f^{p+2}(a) + \dots$$

Sea $F(\rho)$ una funcion que representa la suma de los módulos de los términos de la serie (1), se averigua fácilmente que la suma correspondiente de los módulos de los términos de la serie (4) es la derivada $F^p(\rho)$, respecto a ρ, de la funcion $F(\rho)$.

Sea ahora $\gamma = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ la abcisa crítica imajinaria i $f^q(X)$ la primera de las derivadas de $f(X)$ que se hace infinita cuando $X = \gamma$; pongamos

$$\alpha = a + R\cos\theta$$

$$\beta = R \operatorname{sen}\theta$$

tendremos

$$\gamma = a + R\, e^{i\theta}$$

Si, en la fórmula (4), se reemplaza X por γ o bien, en el segundo miembro, ρ por R i ϕ por θ, este segundo miembro es infinito, por hipótesis, cuando $p=q$, luego la serie $F^q(\rho)$ de los módulos tiene una suma infinita cuando $\rho = R$.

En resúmen, la funcion real $F^q(\rho)$ de la variable real ρ se hace infinita cuando $\rho = R$ es decir que $\rho = R$ es una abcisa crítica real de la funcion $F(\rho)$. Demostraremos que $F^q(\rho)$ es la primera de las derivadas de $F(\rho)$ que se hace infinita cuando $\rho = R$. Esto equivale a demostrar que $F^q(R)$ es una serie *estrictamente diverjente.*

Sea

$$\frac{R^n}{1.2\ldots n} f^{q+n}(a) = v_n$$

Se tendrá

$$f^q\left(a + R\, e^{i\phi}\right) = V = v_0 + v_1\, e^{i\phi} + v_2\, e^{2i\phi} + \ldots$$

Por hipótesis, la serie V debe tener una suma infinita cuando $\phi = \theta$, esto exije primero que la suma de los módulos sea infinita i, en seguida, que los coeficientes v_0, v_1, $v_2 \ldots$ no tengan todos el mismo signo; en efecto, si tuvieran todos el mismo signo, la serie V no podria tener una suma infinita sino para el valor $\phi = 0$, para los demas valores de ϕ la serie seria semi converjente o indeterminada.

Los coeficientes v_0, v_1, $v_2 \ldots$ tienen, por definicion, mismos signos que las derivadas $f^q(a)$, $f^{q-1}(a) f^{q-2}(a) \ldots$ luego, *cuando una funcion real de una variable real tiene una abcisa crítica imajinaria, sus derivadas consecutivas no pueden tener todas un mismo signo.*

Hagamos $\phi = \theta + \omega$, tendremos

$$V = \left(v_0 + v_1\, e^{i\omega} \cos\theta + v_2\, e^{2i\omega} \cos 2\theta + \ldots\right)$$

$$+ \sqrt{-1}\left(v_1\, e^{i\omega} \operatorname{sen}\theta + v_2\, e^{2i\omega} \operatorname{sen} 2\theta + \ldots\right)$$

El segundo miembro debe ser infinito cuando $\omega = 0$ i finito

para los demas valores de ω; luego los coeficientes de las esponenciales deben tener, en una o en las dos series entre paréntesis, mismos signos i sumas infinitas.

De ahí se deduce que los productos

$$f^q(a), f^{q-1}(a)\cos\theta, f^{q-2}(a)\cos 2\theta, \ldots$$

O bien

$$f^{q-1}(a)\operatorname{sen}\theta, f^{q-2}(a)\operatorname{sen} 2\theta,$$

tienen mismos signos; este resultado indica cuál es la lei que siguen los signos de las derivadas de la funcion $f^q(X)$ cuando esta funcion tiene una abcisa crítica imajinaria.

Ademas, una de las series

$$(5) \qquad \begin{cases} v_0 + v_1\cos\theta + v_2\cos 2\theta + \ldots \\ v_1\operatorname{sen}\theta + v_2\operatorname{sen} 2\theta + \ldots \end{cases}$$

O las dos deben tener una suma infinita; sean $u_0, u_1, u_2 \ldots$ los valores absolutos de los coeficientes, la serie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

debe tener una suma infinita i debe ser estrictamente diverjente pues, de lo contrario, las series (5) serian indeterminadas.

Pero la serie U es precisamente el valor de $F^q(R)$ luego $F^q(R)$ es una serie *estrictamente diverjente.*

Es lo que se debia demostrar.

Las condiciones de converjencia de las series C i S o de la serie imajinaria equivalente (1) se deducen inmediatamente de estos resultados. En efecto, la suma de los módulos de los términos de estas series es una funcion real $F(\rho)$ de la variable real ρ, i esta funcion tiene por abcisa crítica real $\rho = R$, luego esta suma es finita cuando ρ es menor que R e infinita cuando ρ es mayor que R. Las series C i S i la serie imajinaria equivalente $f(a + fe^{i\phi})$ serán por consiguiente converjentes si ρ es menor que R e indeterminadas si ρ es mayor que R.

La interpretacion jeométrica es evidente; consideremos la serie (4), ordenada segun las potencias de $X-a$, esta es equivalente a la serie (1); podremos decir que esta serie (4) es converjente si el punto M que representa figuradamente la variable X (fig. 5) se encuentra situado en el interior de un círculo de centro A i de radio R; indeterminada si el punto M viene en M' al esterior del mismo círculo.

El círculo de centro A i de radio R ha sido llamado, por *Cauchy, círculo de converjencia, en A, de la funcion* $f(X)$. A cada punto A del eje OX corresponde así un círculo de converjencia. Se ve que todas las circunferencias de estos círculos pasan por un punto C', simétrico de C respecto a OX; *este punto C' es tambien un punto crítico*, en efecto las sumas de las series C i S no cambian, en valor absoluto, cuando φ se cambia en $-\varphi$.

Cuando el punto M se encuentra situado sobre la circunferencia del círculo de converjencia, es decir cuando $\rho=R$ la derivada $F^q(\rho)$ se desarrolla bajo la forma de una serie estrictamente diverjente, luego $F^p(R)$ será finito si p es menor que q e infinito si p es mayor que q. El desarrollo de $f^p\left(a+Re^{i\varphi}\right)$ segun las potencias de R será pues una serie converjente si p es menor que q e indeterminada si p es mayor que q.

Si $p=q$ el desarrollo es semi converjente para todos los valores de φ otros que θ i $-\theta$, i para estos últimos valores de φ el desarrollo es estrictamente diverjente.

APLICACIONES

Desarrollo de arc tg x

La funcion $f(X)=\text{arc tg } X$ tiene mismas abcisas críticas que su derivada

$$f'(X)=\frac{1}{1+X^2}$$

esta última funcion tiene dos abcisas críticas imajinarias $X=\pm\sqrt{-1}$, representados por dos puntos del eje OY a la distancia *uno* del orijen.

Hagamos $a=0$ en la fórmula de Taylor (4); el círculo de converjencia tiene entónces su centro en el oríjen i su radio es igual a uno.

Se tiene ahora

$$\frac{1}{1+X^2}=1-X^2+X^4-X^6+\ldots$$

Luego

$$\text{arc tg}\,x=\int_0^x \frac{dX}{1+X^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

La serie del segundo miembro es converjente solo cuando x es menor que uno en valor absoluto. Cuando $x=\pm 1$, la serie es semi converjente i representa todavía la funcion; se obtiene entónces la fórmula

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Desarrollo de LX

Haremos, como en el capítulo V, $X=x+a$ i supondremos ahora que x tiene un valor cualquiera real o imajinario. El punto crítico de la funcion es el oríjen; luego el círculo de converjencia que corresponde a la abcisa a, tiene por radio a. En el interior del círculo de converjencia se tendrá como mas arriba.

$$L\,(x+a)=La+L\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

Hagamos

$$\frac{x}{a}=\rho\, e^{i\omega}$$

Tendremos

$$L\left(1+\rho\, e^{i\omega}\right)=\rho\, e^{i\omega}-\frac{\rho^2}{2}\,e^{2i\omega}+\ldots$$

El círculo de converjencia tiene ahora su centro en el punto de abcisa 1 i pasa por el oríjen, luego la serie imajinaria es converjente cuando ρ es menor que uno. Sea tambien

(6) $$L\left(1+\rho\, e^{i\omega}\right)=C+S\sqrt{-1}$$

Tendremos

$$C=\rho\cos\omega-\frac{\rho^2}{2}\cos 2\omega+\ldots$$

$$S=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega-\frac{\rho^2}{2}\,\mathrm{sen}\,2\omega+\ldots$$

En el caso límite $\rho=1$, la serie de los módulos es estrictamente diverjente, luego las series C i S son semi converjentes o estrictamente diverjentes i la fórmula (6) queda exacta para el mismo valor de ρ.

La funcion LX puede tener varios valores para un mismo valor de X como lo esplicaremos en seguida, elejiremos el valor cero cuando $X=1$ i supondremos que el ángulo ω queda comprendido entre 0 i π; entónces

$$L\left(1+e^{i\omega}\right)=L\left(1+\cos\omega+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\omega\right)$$

$$=L\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)+L\left(\cos\frac{\omega}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=L\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}$$

Segun esto

$$C=L\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)=\cos\omega-\frac{\cos 2\omega}{2}+\frac{\cos 3\omega}{3}\ldots$$

$$S=\frac{\omega}{2}=\mathrm{sen}\,\omega-\frac{\mathrm{sen}\,2\omega}{2}+\frac{\mathrm{sen}\,3\omega}{3}\ldots$$

La segunda fórmula parece falsa cuando $\omega=\pi$, pues el primer miembro es entónces igual a $\frac{\pi}{2}$ i el segundo a cero; sin embargo se debe entender que $\frac{\pi}{2}$ es el límite de la suma de la série cuando ω tiende hácia π; ademas, cuando $\omega=\pi$, la variable tiene precisamente la situacion del punto crítico i esta sola consideracion basta para esplicar la anomalía aparente de la fórmula.

Se deduce del valor de S una fórmula interesante; reemplacemos ω por $\pi - \omega$, tendremos

$$S' = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} = \text{sen}\,\omega + \frac{\text{sen}\,2\omega}{2} + \frac{\text{sen}\,3\omega}{3} + \ldots$$

Luego, comparando S i S'.

$$\frac{\pi}{4} = \text{sen}\,\omega + \frac{\text{sen}\,3\omega}{3}$$

Esta fórmula es exacta solo cuando ω queda comprendido entre 0 i π.

Desarrollo de X^m

Como én el caso de LX el punto crítico es el oríjen, de tal manera que si se hace $X = x + a$ el círculo de converjencia del punto A de abcisa a, tiene su centro en A (fig. 6) i un radio igual a a. Sea M el punto representativo de la variable $X = x + a$, el desarrollo de Taylor será converjente si M está en el interior del círculo de converjencia.

La relacion característica de la funcion $(x+a)^m$ queda naturalmente la misma, puesto que se ha deducido del desarrollo mismo de la funcion; podremos por consiguiente considerar simplemente el caso en que $a = 1$. Sea entónces

$$X = 1 + \rho\, e^{i\omega}$$

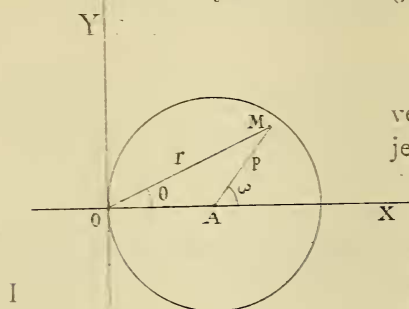
Tendremos

$$\left(1 + \rho\, e^{i\omega}\right)^m = C + S\sqrt{-1}$$

$$C = 1 + \frac{m}{1}\rho\cos\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\rho^2\cos 2\omega + \ldots$$

$$S = \frac{m}{1}\rho\,\text{sen}\,\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\rho^2\,\text{sen}\,2\omega + \ldots$$

Estas fórmulas serán exactas si ρ es menor que uno, cualquiera que sea el valor de m. Pongamos ahora



$$(7) \quad \begin{cases} 1+\rho\cos\omega = r\cos\theta \\ \rho\,\text{sen}\,\omega = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Se ve que r i θ definen el vector OM que junta el oríjen con el punto M, entónces

$$1+\rho e^{i\omega} = r e^{i\theta}$$

I

$$C+S\sqrt{-1} = r^m \left(e^{i\theta}\right)^m = r^m e^{mi\theta}$$

$$= r^m \left(\cos m\,\theta + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ m\,\theta\right)$$

De tal manera que, si ρ es menor que uno, se tiene rigorosamente

$$(8) \quad \begin{cases} r^m \cos m\theta = 1 + \frac{m}{1}\rho\cos\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\rho^2\cos 2\omega + \dots \\ r^m\,\text{sen}\,m\theta = \qquad \frac{m}{1}\rho\,\text{sen}\,\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\rho^2\,\text{sen}\,2\omega + \dots \end{cases}$$

La funcion X^m puede tener valores diferentes para un mismo valor de X, elejiremos para X el valor 1 cuando $\rho=0$.

En el caso límite de $\rho=1$, la serie de los módulos es converjente si m es positivo i estrictamente diverjente si m es comprendido entre 0 i 1, luego en estos casos las fórmulas (8) quedan exactas.

Supongamos que X varia entre 0 i π, entónces las fórmulas (7) dan

$$r = 2\cos\frac{\omega}{2}$$

$$\theta = \frac{\omega}{2}$$

Se tiene, por consiguiente

$$(9)\ \begin{cases} \left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^m \cos m\frac{\omega}{2} = 1 + \frac{m}{1}\cos\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{sen} 2\omega + \ldots \\ \left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^m \operatorname{sen} m\frac{\omega}{2} \qquad \frac{m}{1}\operatorname{sen}\omega + \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{sen} 2\omega + \ldots \end{cases}$$

NOTA.—Se ha escrito mas arriba

$$\left(e^{i\theta}\right)^m = e^{mi\theta}$$

esta fórmula se ha demostrado cuando m era entero i positivo; para los demas valores de m, basta tomar los logaritmos de los dos miembros, para averiguar que la relacion es exacta; estos logaritmos tienen, en efecto, una significacion bien determinada i calculable por medio de la serie de Taylor puesto que el módulo de $e^{i\theta}$ es uno.

Fórmula de Euler i Lagrange.—De las fórmulas (9) se deduce

$$\left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^m \cos\left(a - \frac{m\omega}{2}\right) = \cos\omega + \frac{m}{1}\cos(a-\omega)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(a - 2\omega) + \ldots$$

Hagamos $a = mx$, i $\omega = 2x$ tendremos

$$(10) \qquad (2\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)\,x +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots$$

Esta es una fórmula dada por Euler i Lagrange. No es una fórmula jeneral, en efecto las relaciones (9) suponen que ω varia entre 0 i π, luego, en la fórmula (10), x debe quedar comprendido entre 0 i $\frac{\pi}{2}$.

Caso de $m = -1$.

Las fórmulas (10) dan entónces el desarrollo de $\frac{1}{X}$; esta funcion es la derivada de LX. En el desarrollo de LX, la serie de

los módulos es estrictamente diverjente cuando la variable X es representada por un punto del círculo de converjencia; luego, segun la teoría jeneral, la serie de los módulos del desarrollo de $\frac{1}{X}$ debe ser diverjente para los mismos valores de X.

De ahí se deduce que, en este caso, las series C' i S' deben estar indeterminadas.

Las fórmulas (9) dan

$$r = 2 \cos \frac{\omega}{2}$$

$$\theta = \frac{\omega}{2}$$

I las fórmulas (10)

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos \omega + \cos 2\omega - \cos 3\omega + \dots$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}{2 \cos \frac{\omega}{2}} = \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} 2\omega + \operatorname{sen} 3\omega \dots$$

O bien, si se cambia ω en $\pi - \omega$.

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 1 + \cos w + \cos 2w + \dots \\ \frac{\cos \frac{w}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{w}{2}} = \operatorname{sen} \omega + \operatorname{sen} 2w + \dots \end{array} \right.$$

Estas fórmulas no son exactas; las series que figuran en los segundos miembros han sido estudiadas en el capítulo VI, i se ha demostrado que su suma es finita pero indeterminada; los primeros miembros de las fórmulas (11) representan cada uno el término medio de los límites entre los cuales oscila la suma de la serie correspondiente del segundo miembro. Hai por consiguiente concordancia entre la teoría jeneral i la aplicacion anterior.

ALBERTO OBRECHT

(Continuará)

